Null machen, indem man mit Kottler diejenige Eigenschaft, welche die Kirchhoffsche Näherung zeigt, zur Bedingung eines „strengen“ Beugungsproblems deklariert. Man verwickelt sich dadurch in zweierlei Hinsicht in Widersprüche: erstens, weil der „Kirchhoffsche Schirm“, wie bekannt, nur für die Primärstrahlung schwarz, für die gebeugte Welle dagegen durchsichtig ist; zweitens, weil auch die schwärzeste Oberfläche eine streifende Welle vollständig reflektieren muß. Hieran scheitert der Beweis von Ignatowsky[7], daß die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung dem schwarzen Schirm angemessen sei. Er nimmt zum Beweise nämlich an, daß bei der Schwenkung einer schwarzen Halbebene die Beugungserscheinung ungeändert bleibt; das kann man aber nur annehmen, solange man die Stellung streifender Inzidenz nicht berührt! Als ideal schwarz kann man eben nicht eine Oberfläche, sondern nur ein unbegrenzt tiefes Loch ansehen, welches man jedoch im schlichten physikalischen Raum nicht unterbringen kann. Man braucht dazu einen Riemannschen Raum, und zwar muß dieser, damit nicht ein Teil der durch den Schlund verschlungenen Strahlung wieder erscheint, unendlich viele Blätter haben. Es kommt also nur die Sommerfeldsche Lösung im unendlichblättrigen Raum für diese mathematische Idealisierung in Frage. Physikalisch ist dagegen der völlig schwarze Schirm überhaupt keine Idealisierung, sondern eine grobe Näherung.

Doch muß (in Übereinstimmung mit Kottler) hervorgehoben werden, daß die Kirchhoffsche Beugungstheorie in unserer Darstellung nicht ein überbestimmtes Randwertproblem[8], sondern eine *eindeutig bestimmte Sprungwertaufgabe* ist. Man kann die Sprungwerte von u *und* $\partial u/\partial n$, bzw. $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{H}$, auf einer Fläche willkürlich vorgeben und bestimmt dadurch die Funktion im ganzen Raum (also innerhalb und außerhalb der Fläche) eindeutig. Die gebeugte Welle kann man durch Überlagerung von Elementarwellen herstellen, welche unabhängig voneinander von den Flächenelementen ausgehen, freilich nicht nur nach vorwärts, sondern auch zurück. Man darf damit der Kirchhoffschen Formulierung des Huygensschen Prinzips doch wohl einen guten physikalischen Sinn unterlegen, muß sie also nicht als bloße „mathematische Fiktion“ bezeichnen (von Laue[8]).

Meinem verehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat Sommerfeld, von dem mancher tragende Pfeiler im Gebäude der Beugungstheorie herrührt, sei der bescheidene Baustein, den ich mit dieser Mitteilung beitrage, zur Vollendung seines 80. Lebensjahres in dankbarer Liebe gewidmet.

[7] Ignatowsky, Ann. Physik **77**, 589 [1925].

[8] S. dazu etwa den Artikel „Beugung“ (M. v. Laue) in Handb. d. Experimentalphysik, Akad. Verl.Ges., Leipzig 1928, Bd. XVIII, bes. S. 298.

Strenge Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe

Von Joseph Meixner

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. **3a**, 506—518 [1948]; eingegangen am 15. Juli 1948)

Herrn Geheimrat Prof. Dr. A. Sommerfeld zu seinem 80. Geburtstage gewidmet

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe wird streng gelöst. Die Beugung an der kreisförmigen Öffnung in der vollkommen leitenden, unendlich ausgedehnten Ebene läßt sich vermittels einer gegebenen Verallgemeinerung des Babinetschen Prinzips auf das erste Problem zurückführen.

I. Formulierung des Beugungsproblems

In der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an Objekten endlicher Ausdehnung liegt stets folgendes Problem vor. Eine gegebene einfallende Welle fällt auf ein Hindernis, ein beugendes Objekt, und es ist eine auslaufende Welle zu suchen, die sich in großer Entfernung wie eine Kugelwelle mit richtungsabhängiger Amplitude verhält, und die, zur einfallenden Welle addiert, auf dem beugenden Objekt gewissen Randbedingungen genügt. Die Art dieser Randbedingungen hängt davon ab, welche Eigenschaften das beugende Objekt hat, ob es etwa schwarz ist und sämtliche auftreffende Strahlung absorbiert, ob es beispielsweise vollkommen leitend ist, d. h. die auftreffende Strahlung völlig wieder abstrahlt usw.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit ebenen Schirmen endlicher Ausdehnung, insbesondere mit Kreisscheiben als Beugungsobjekt, von denen wir voraussetzen, daß sie unendlich dünn und vollkommen leitend sind. Physikalisch gesprochen heißt das, daß ihre Dicke klein gegen die Wellenlänge, aber immer noch so groß ist, daß der Schirm die Eigenschaft der Undurchsichtigkeit besitzt. Die Voraussetzung der vollkommenen Leitfähigkeit ist bei den üblichen Metallen im Gebiet der eigentlichen elektromagnetischen Wellen (Wellenlänge > 1 mm) meist hinreichend gut erfüllt, wie an ihren hohen Reflexionskoeffizienten zu erkennen ist.

Bei diesem Beugungsproblem ist stets das komplementäre Problem miterledigt, nämlich die Beugung und Reflexion einer elektromagnetischen Welle an der Öffnung endlicher Ausdehnung in der unendlichen, vollkommen leitenden Ebene. Dies folgt aus dem im nächsten Abschnitt bewiesenen verallgemeinerten Babinetschen Prinzip.

Bei ebenen Schirmen liegen hinsichtlich der Beugung elektromagnetischer Wellen besondere Verhältnisse vor, etwa gegenüber der Beugung an der Kugel, denn die Kante des Schirmes bedingt eine Singularität des elektromagnetischen Feldes. Dies tritt schon im statischen Grenzfall eines vollkommen leitenden ebenen Schirms im homogenen elektrischen Feld in Erscheinung, wenn der Schirm nicht senkrecht zu den Kraftlinien steht; es wird zwar ein endliches elektrisches Dipolmoment im Schirm induziert, aber die influenzierte Ladungsdichte wird an der Schirmkante unendlich groß und damit auch die elektrische Feldstärke.

Beim skalaren Beugungsproblem für ebene Schirme, wie es etwa in der Akustik vorliegt, bleibt die Beugungswelle an der Schirmkante endlich. Man nimmt diese Tatsache in die Voraussetzungen auf und kann dann zeigen, daß das skalare Beugungsproblem eindeutig lösbar ist. Beim elektromagnetischen Beugungsproblem ist dagegen die Forderung der Endlichkeit der Beugungswelle durch eine andere Forderung zu ersetzen. Es liegt nahe und ist tatsächlich zur Erzwingung der eindeutigen Lösbarkeit des Beugungsproblems ausreichend, vom elektromagnetischen Feld zu verlangen, daß seine Energie in jedem endlichen Bereich endlich ist. Dann können zwar die elektrische und die magnetische Feldstärke an der Schirmkante unendlich groß werden, aber nur so, daß sie in der Umgebung der Schirmkante quadratisch integrierbar sind. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so wird nur die auf den Schirm auftreffende Energie der einfallenden Welle, aber keine zusätzliche Energie abgestrahlt; ist sie nicht erfüllt, so haben wir kein reines Beugungsproblem, sondern das elektromagnetische Feld der reinen Beugung wird überlagert von einer zusätzlichen Ausstrahlung, die aus der Schirmkante heraus erfolgt und als eine Art erzwungene Ausstrahlung betrachtet werden kann.

Das Problem der Beugung einer einfallenden elektromagnetischen Welle $\mathfrak{E}^e$, $\mathfrak{H}^e$ mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ am vollkommen leitenden ebenen Schirm endlicher Ausdehnung ist demnach so zu formulieren. Es ist eine gebeugte elektromagnetische Welle $\mathfrak{E}^b$, $\mathfrak{H}^b$ mit derselben Zeitabhängigkeit und mit folgenden weiteren Eigenschaften zu suchen:

1. Das Feld $\mathfrak{E}^b$, $\mathfrak{H}^b$ genügt ebenso wie $\mathfrak{E}^e$, $\mathfrak{H}^e$ den Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = - i\omega\mu\mathfrak{H}; \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = + i\omega\varepsilon\mathfrak{E} \tag{1}$$

im ganzen Raum mit der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ, welche beide als ortsunabhängig vorausgesetzt werden.

2. In großer Entfernung vom Schirm verhält sich die gebeugte Welle wie eine auslaufende Kugelwelle mit richtungsabhängiger Amplitude; d. h. sie genügt der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung[1].

3. Auf dem beugenden Schirm ist (Bedingung der vollkommenen Leitfähigkeit)

$$(\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^b)_{\text{tang}} = 0 . \tag{2}$$

4. An der Kante des beugenden Schirmes werden $\mathfrak{E}^b$ und $\mathfrak{H}^b$ in solcher Weise unendlich, daß die elektromagnetische Energiedichte integrierbar ist.

Versuche, die Beugung elektromagnetischer Wellen an der Kreisscheibe zu behandeln, liegen bereits vor, sie führten aber zu Lösungen, die nur die Bedingungen 1—3, nicht aber die 4. Bedingung erfüllen[2]. Im folgenden wird die strenge Lösung dieses Problems entwickelt.

[1] A. Sommerfeld, Jber. dtsch. Math.-Ver. **21**, 309 [1913].

[2] S. Anm. 5.

II. Das verallgemeinerte Babinetsche Prinzip

Wir stellen einander gegenüber:

1. Die Beugung einer einfallenden, nicht notwendig ebenen Welle am ebenen, vollkommen leitenden Schirm F, der ganz im Endlichen liegt;

2. die Beugung einer einfallenden Welle am vollkommen leitenden Schirm F′, der den Schirm F zur vollen Ebene ergänzt.

Die beiden Schirme F und F′ werden komplementär genannt. Die Ebene, in der sie liegen, sei die Ebene $z = 0$.

Die Randbedingungen der vollkommenen Leitfähigkeit lauten für die gesamten Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_y = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 0\,, \quad \mathfrak{H}_z = 0\,. \tag{3}$$

Sie gelten identisch für alle x, y der vollkommen leitenden Fläche mit $z = 0$. Die ersten beiden sind mit (2) äquivalent, die letzten vier folgen auf Grund der Maxwellschen Gleichungen (1) aus den ersten beiden. Wir benötigen nun die drei Hilfssätze:

1. Sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit den Argumenten x, y, z eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (1), so ist das durch die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $-\mathfrak{E}_z$, $-\mathfrak{H}_x$, $-\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ mit den Argumenten x, y, $-z$ gegebene elektromagnetische Feld ebenfalls eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen.

2. Ist $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ das elektromagnetische Feld einer von einer ebenen Figur ausstrahlenden Welle, so haben $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ in symmetrisch zur Ebene der Figur liegenden Punkten gleiche, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$ entgegengesetzte Werte.

3. Ist $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (1), so ist auch das Feld

$$\mathfrak{E}' = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \mathfrak{H}\,, \quad \mathfrak{H}' = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \mathfrak{E}$$

eine solche.

Der erste Hilfssatz ist leicht zu beweisen. Der zweite Hilfssatz ergibt sich, wenn man in der ebenen Figur eine beliebige Verteilung elektrischer Ströme und Ladungsdichten ansetzt (aus solchen läßt sich das elektromagnetische Feld stets herleiten) und mit Hilfe der elektrodynamischen Potentiale daraus das ausgestrahlte Feld berechnet. Der dritte Hilfssatz ist evident.

Bei der Beugung an der im Endlichen liegenden ebenen Figur F ist der einfallenden, für alle z definierten Welle (Index e) eine gebeugte Welle (Index b) überlagert, deren Verhalten für $z \leqq 0$ aus dem für $z \geqq 0$ nach dem zweiten Hilfssatz folgt, und welche die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Wir schreiben mit Unterdrückung der Argumente x, y

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_x^e(z) + \mathfrak{E}_x^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_x^e(z) + \mathfrak{E}_x^b(-z),\\
\mathfrak{E}_y &= \mathfrak{E}_y^e(z) + \mathfrak{E}_y^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_y^e(z) + \mathfrak{E}_y^b(-z),\\
\mathfrak{E}_z &= \mathfrak{E}_z^e(z) + \mathfrak{E}_z^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_z^e(z) - \mathfrak{E}_z^b(-z),\\
\mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}_x^e(z) + \mathfrak{H}_x^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_x^e(z) - \mathfrak{H}_x^b(-z),\\
\mathfrak{H}_y &= \mathfrak{H}_y^e(z) + \mathfrak{H}_y^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_y^e(z) - \mathfrak{H}_y^b(-z),\\
\mathfrak{H}_z &= \mathfrak{H}_z^e(z) + \mathfrak{H}_z^b(z) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H}_z^e(z) + \mathfrak{H}_z^b(-z).
\end{aligned} \tag{4}$$

Auf F gelten die Randbedingungen (3), die ausführlich lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_x^e + \mathfrak{E}_x^b = 0\,, \quad \mathfrak{E}_y^e + \mathfrak{E}_y^b = 0\,, \quad \mathfrak{H}_z^e + \mathfrak{H}_z^b = 0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_z^e + \mathfrak{E}_z^b) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{H}_x^e + \mathfrak{H}_x^b) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{H}_y^e + \mathfrak{H}_y^b) = 0
\end{aligned}\right\} \text{auf F,} \tag{5}$$

während auf F′ die beiden Felddarstellungen für $z \gtrless 0$ und ihre Ableitungen stetig ineinander übergehen müssen; das bedeutet

$$\mathfrak{E}_z^b = 0\,, \quad \mathfrak{H}_x^b = 0\,, \quad \mathfrak{H}_y^b = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x^b}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y^b}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_z^b}{\partial z} = 0 \quad \text{auf F}'. \tag{6}$$

Überdies muß die gebeugte Welle die Bedingung integrierbarer elektromagnetischer Energiedichte erfüllen.

Wir behaupten nun, daß das durch

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}'_x &= \mathfrak{H}^e_x(z)-\mathfrak{H}^e_x(-z)+\mathfrak{H}^b_x(z) \quad \text{bzw.} \quad +\mathfrak{H}^b_x(-z),\\
\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}'_y &= \mathfrak{H}^e_y(z)-\mathfrak{H}^e_y(-z)+\mathfrak{H}^b_y(z) \quad \text{bzw.} \quad +\mathfrak{H}^b_y(-z),\\
\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}'_z &= \mathfrak{H}^e_z(z)+\mathfrak{H}^e_z(-z)+\mathfrak{H}^b_z(z) \quad \text{bzw.} \quad -\mathfrak{H}^b_z(-z),\\
\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}'_x &= -\mathfrak{E}^e_x(z)-\mathfrak{E}^e_x(-z)-\mathfrak{E}^b_x(z) \quad \text{bzw.} \quad +\mathfrak{E}^b_x(-z),\\
\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}'_y &= -\mathfrak{E}^e_y(z)-\mathfrak{E}^e_y(-z)-\mathfrak{E}^b_y(z) \quad \text{bzw.} \quad +\mathfrak{E}^b_y(-z),\\
\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}'_z &= -\mathfrak{E}^e_z(z)+\mathfrak{E}^e_z(-z)-\mathfrak{E}^b_z(z) \quad \text{bzw.} \quad -\mathfrak{E}^b_z(-z)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

für $z \geqq 0$ bzw. $z \leqq 0$ gegebene elektromagnetische Feld das komplementäre Beugungsproblem für eine einfallende Welle mit der elektrischen Feldstärke $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}^e$ und der magnetischen Feldstärke $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^e$ löst. Der Beweis läßt sich in wenigen Zeilen führen.

1. Das elektromagnetische Feld ist für $z \geqq 0$ eine Überlagerung der einfallenden Welle, der nach den Reflexionsgesetzen reflektierten Welle und einer gebeugten Welle, während für $z \leqq 0$ nur eine gebeugte Welle vorhanden ist. Die gebeugte Welle genügt für $z \gtreqless 0$ der Ausstrahlungsbedingung, da diese sich bei der Substitution des dritten Hilfssatzes nicht ändert.

2. Alle angegebenen Wellen genügen nach dem ersten und dritten Hilfssatz den Maxwellschen Gleichungen.

3. Auf dem beugenden Schirm gelten wegen (6) die Randbedingungen (3).

4. In der Öffnung F gelten wegen (5) die Stetigkeitsbedingungen für die elektromagnetischen Feldstärken und ihre Ableitungen.

5. Sind die elektromagnetischen Feldstärken in (4) an der Schirmkante quadratisch integrierbar, so gilt das auch für jene in (7).

Zusammenfassend können wir sagen: Löst die gebeugte Welle $\mathfrak{E}^b$, $\mathfrak{H}^b$ das Beugungsproblem für die auf den Schirm F einfallende Welle $\mathfrak{E}^e$, $\mathfrak{H}^e$, so löst für $z \geqq 0$ die Welle $+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}^b$, $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^b$, für $z \leqq 0$ die Welle $-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}^b$, $+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^b$ das Beugungsproblem für die auf den Schirm F′ einfallende Welle $+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{H}^e$, $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^e$. Die Umkehrbarkeit dieses Satzes ist leicht einzusehen.

Wir können uns also im folgenden auf die Behandlung der Beugung an dem im Endlichen liegenden ebenen Schirm F beschränken, da dann die Beugung am komplementären Schirm F′ miterledigt ist.

III. Die Debyeschen Potentiale und ihre Randbedingungen

Debye[3] hat im Anschluß an Untersuchungen von Mie[4] über die Beugung elektromagnetischer Wellen an der Kugel gezeigt, daß man das elektromagnetische Feld durch zwei skalare Potentiale Π_1 und Π_2 darstellen kann, von welchen das erste dadurch ausgezeichnet ist, daß seine radiale Komponente des magnetischen Vektors verschwindet, während für das zweite die radiale Komponente des elektrischen Vektors verschwindet. Wir nennen sie Debyesche Potentiale. Sie sind definiert durch

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot\,rot}\,(\mathfrak{r}\,\Pi_1) - \frac{i\,k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\mathrm{rot}\,(\mathfrak{r}\,\Pi_2)\,, \tag{8}$$

$$\mathfrak{H} = +\frac{i\,k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\mathrm{rot}\,(\mathfrak{r}\,\Pi_1) + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot\,rot}\,(\mathfrak{r}\,\Pi_2) \tag{9}$$

und genügen beide der Wellengleichung

$$\Delta\Pi_i + k^2\,\Pi_i = 0 \qquad (i = 1{,}2)\,, \tag{10}$$

[3] P. Debye, Ann. Physik (4) **30**, 57 [1909].

[4] G. Mie, Ann. Physik (4) **25**, 377 [1908].

wobei die Wellenzahl k durch

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \tag{11}$$

gegeben ist und $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor bedeutet.

Die Randbedingungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ lassen sich im Falle der beugenden Kugel in einfache Randbedingungen für die Debyeschen Potentiale umrechnen, und das vektorielle elektromagnetische Beugungsproblem läßt sich vollständig in zwei voneinander unabhängige skalare Beugungsprobleme für Π_1 und Π_2 separieren.

Diese beiden Potentiale lassen sich mit Erfolg auch bei der Behandlung der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen, insbesondere der Kreisscheibe und der kreisförmigen Öffnung in der unendlich ausgedehnten Ebene anwenden. Zwar bringt die Frage der Randbedingungen gewisse Schwierigkeiten, doch lassen sie sich bewältigen.

Der beliebig gestaltete Schirm liege in der x-y-Ebene. Dann müssen $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ auf dem ganzen Bereich des Schirmes verschwinden, d. h. nach (8) muß wegen $z = 0$ gelten

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\Pi_1 + x\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right] + k^2 x \Pi_1\right\} + \frac{i k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, y \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\Pi_1 + x\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right] + k^2 y \Pi_1\right\} - \frac{i k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, x \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Dies sind zwei partielle Differentialgleichungen in x und y für die Funktionen Π_1 und $\partial\Pi_2/\partial z$. Sie lassen sich einfach durch Einführung von Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi \tag{14}$$

integrieren. Es ergibt sich

$$\varrho\, \Pi_1 = \alpha(\varphi)\, e^{ik\varrho} + \beta(\varphi)\, e^{-ik\varrho}, \tag{15}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \varrho^2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = \frac{d\alpha}{d\varphi} e^{ik\varrho} - \frac{d\beta}{d\varphi} e^{-ik\varrho} \tag{16}$$

für $z = 0$ und für alle Punkte ϱ, φ des Schirmes. Hierin sind $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$ Funktionen, die nicht aus den Randbedingungen (2) ermittelt werden können; vielmehr werden sie sich aus der Bedingung der Integrierbarkeit der elektromagnetischen Energiedichte in der Umgebung der Schirmkante berechnen lassen[5].

IV. Formulierung des Beugungsproblems in den Debyeschen Potentialen

Es seien Π_1^e und Π_2^e die Debyeschen Potentiale der einfallenden ebenen Welle. Sie lassen sich durch geschlossene Ausdrücke darstellen. Die Debyeschen Potentiale der gebeugten Welle seien Π_1^b und Π_2^b. Für diese Potentiale stellen wir folgende Bedingungen auf:

1. Sie genügen alle der Wellengleichung.
2. Π_1^b, Π_2^b verhalten sich in großer Entfernung wie auslaufende Kugelwellen.
3. Es gelten auf dem Schirm die Randbedingungen

$$\Pi_1^e + \Pi_1^b = \alpha(\varphi)\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} + \beta(\varphi)\frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho},$$
$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\partial \Pi_2^e}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2^b}{\partial z}\right) = \frac{d\alpha}{d\varphi}\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho^2} - \frac{d\beta}{d\varphi}\frac{e^{-ik\varrho}}{\varrho^2}. \tag{17}$$

4. $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$ sind so zu wählen, daß die elektromagnetische Feldenergie an der Schirmkante integrierbar ist.
5. Π_1^b und Π_2^b haben im Koordinatenanfangspunkt Singularitäten von der in (15) und (16) näher bezeichneten Art.

Es ist leicht zu zeigen, daß das aus diesen Debyeschen Potentialen berechnete elektromagnetische Feld die in Abschn. I angegebenen vier Bedingungen erfüllt. Umgekehrt ist unschwer einzusehen, daß die obigen Bedingungen für die Debyeschen Potentiale auch notwendig sind. Insbesondere folgt die Endlichkeit dieser Potentiale auf dem Schirmrand, der einzigen Stelle, wo eine Singularität zu

[5] Lösungen der Wellengleichung, welche alle Bedingungen des Beugungsproblems mit Ausnahme der Integrierbarkeitsbedingung erfüllen, kann man mehrere angeben. Eine Lösung dieser Art wurde von F. Möglich (Ann. Physik [4] **83**, 609 [1927]) gefunden. Eine andere, welche an Stelle von (15) und (16) die Randbedingungen $\Pi_1 = 0$ und $\partial\Pi_2/\partial z = 0$ auf dem Schirm erfüllt, wurde vom Verf. skizziert (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl., **1946**, 74). Auch für die letztere gilt das verallgemeinerte Babinetsche Prinzip, wie vom Verf. (Z. Naturforschg. **1**, 496 [1946]) gezeigt wurde. Es ist aber fraglich, ob man solchen Lösungen mit nicht integrierbarer Energiedichte, bei denen eine Ausstrahlung aus der Schirmkante heraus erfolgt, eine physikalische Realität zuschreiben kann.

erwarten wäre, aus (15) und (16), vorausgesetzt, daß der Schirmrand nicht gerade durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Doch läßt sich dies durch geeignete Wahl der Lage des letzteren stets vermeiden.

Daß die Potentiale Π_1^b und Π_2^b durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt sind, wird die folgende Rechnung zeigen.

V. Kantenbedingungen in den Koordinaten des Drehellipsoids

Für die Behandlung der Beugung an der Kreisscheibe ist die Einführung von Sphäroid-Koordinaten angezeigt. Sie sind definiert durch

$$x = c\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\cos\varphi\,,$$
$$y = c\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\sin\varphi\,, \qquad z = c\,\xi\,\eta \tag{18}$$

und haben den Variabilitätsbereich

$$0 \leqq \xi < \infty\,, \quad -1 \leqq \eta \leqq +1\,, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,. \tag{19}$$

Die Koordinatenfläche $\xi = 0$ ist eine Kreisscheibe in der Ebene $z = 0$, mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt und mit dem Radius c. Sie möge mit dem beugenden Objekt zusammenfallen. Die Koordinatenfläche $\eta = 0$ ist der übrige Teil der Ebene $z = 0$.

Das Volumenelement in den Koordinaten ξ, η, φ ist durch

$$c^3(\xi^2 + \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\varphi \tag{20}$$

gegeben. Von Π_1, Π_2 werden wir voraussetzen dürfen, daß sie sich an der Kante $\xi = \eta = 0$ regulär verhalten, also etwa nach Potenzreihen in ξ, η entwickelt werden können. Die Berechnung der Feldstärkekomponenten liefert aber dann Potenzen von $(\xi^2 + \eta^2)^{-1}$ als Faktoren. Damit werden die Feldstärkekomponenten an der Kante unendlich groß.

Dieser Umstand läßt sich aber nicht vermeiden und liegt in der Natur der Sache begründet. Die Bedingung jedoch, daß das elektromagnetische Feld in der Umgebung der Kante eine integrierbare Energiedichte haben muß, beschränkt die Ordnung des Unendlichwerdens der Feldstärkekomponenten. Diese Beschränkung erreichen wir, indem wir den Debyeschen Potentialen die Bedingungen auferlegen

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} = 0\,, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial \eta} = 0\,, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial \xi} = 0\,, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{für } \xi = \eta = 0\,, \tag{21}$$

wonach in einer Entwicklung von Π_1 und Π_2 nach Potenzen von ξ und η die linearen Glieder in ξ und η wegfallen. Der Beweis von (21) kann so durchgeführt werden, daß für Π_1 und Π_2 eine allgemeine Potenzreihe in ξ und η angesetzt wird, daß hieraus die elektromagnetischen Feldstärken berechnet und daß alle Glieder zu Null gemacht werden, die zu einer unendlich großen Feldenergie Anlaß geben würden.

VI. Die Sphäroid-Funktionen

In den Koordinaten ξ, η, φ läßt sich die Wellengleichung separieren. Wir haben zu unterscheiden zwischen solchen separierten Wellenfunktionen, die im ganzen Raum beschränkt und eindeutig sind und sich wie stehende Wellen verhalten, und solchen, die sich im Unendlichen wie auslaufende bzw. einlaufende Kugelwellen verhalten. Wir bezeichnen die ersteren mit

$$L_n^{m\,(1)}(\xi, \eta, \varphi; i\gamma) = S_n^{m\,(1)}(-i\xi; i\gamma)\; Sp_n^m(\eta; i\gamma)\, e^{im\varphi}\,, \tag{22}$$

die letzteren mit

$$L_n^{m\,(4)}(\xi, \eta, \varphi; i\gamma) = S_n^{m\,(4)}(-i\xi; i\gamma)\; Sp_n^m(\eta; i\gamma)\, e^{im\varphi}\,, \tag{23a}$$

bzw.

$$L_n^{m\,(3)}(\xi, \eta, \varphi; i\gamma) = S_n^{m\,(3)}(-i\xi; i\gamma)\; Sp_n^m(\eta; i\gamma)\, e^{im\varphi}\,, \tag{23b}$$

wobei

$$\gamma = k\,c\,. \tag{24}$$

Die Funktionen L_n^m nennen wir Lamésche Wellenfunktionen. Die Funktionen $S_n^{m\,(i)}$ und Sp_n^m bezeichnen wir als Sphäroid-Funktionen. Die Funktionen $Sp_n^m(\eta; i\gamma)$ sind Verallgemeinerungen der Kugelfunktionen $P_n^m(\eta)$, in die sie für $\gamma = 0$ übergehen; sie genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dSp}{d\eta}\right] + \left[\lambda + \gamma^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right] Sp(\eta; i\gamma) = 0\,. \tag{25}$$

Die Funktionen $S_n^{m(i)}$ $(i = 1, 3, 4)$ genügen, als Funktionen von $-i\xi$ betrachtet, derselben Differentialgleichung. Zur Separation der Wellengleichung in den Koordinaten ξ, η, φ vergleiche man etwa Magnus und Oberhettinger[6]. Über Theorie und Bezeichnung der Sphäroid-Funktionen wird auf Arbeiten des Verf. hingewiesen, die an anderer Stelle erscheinen sollen.

Damit die Wellenfunktionen (22) und (23) eindeutig sind, muß m eine ganze Zahl sein. Der Separationsparameter ist so zu bestimmen, daß $Sp_n^m(\eta; i\gamma)$ in $\eta = \pm 1$ endlich bleibt. Es gibt eine Reihe von solchen Werten, die wir mit $\lambda_{|m|}^m(i\gamma), \lambda_{|m|+1}^m(i\gamma), \lambda_{|m|+2}^m(i\gamma) \ldots$, allgemein $\lambda_n^m(i\gamma)$ bezeichnen. n ist also auch eine ganze, nicht-negative Zahl. Für kleine γ gilt

$$\lambda_n^m(i\gamma) = n(n+1) - \gamma^2 \frac{2n^2 + 2n - 2m^2 - 1}{(2n+3)(2n-1)} + 0(\gamma^4). \tag{26}$$

Für die Sphäroid-Funktionen wurden von Niven[7] folgende Entwicklungen aufgestellt:

$$Sp_n^m(\eta; i\gamma) = \sum_{r \geqq m-n} i^r a_{n,r}^m(i\gamma) P_{n+r}^m(\eta), \tag{27}$$

$$S_n^{m(j)}(-i\xi; i\gamma) = \xi^m(\xi^2+1)^{-m/2} \sum_{r \geqq -m-n} i^r a_{n,r}^m(i\gamma)\, \psi_{n+r}^{(j)}(\gamma\xi)/C_{n0}^m(i\gamma), \tag{28}$$

wobei

$$\psi_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_n(kr), \qquad \psi_n^{(3,4)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, H_n^{(1,2)}(kr). \tag{29}$$

J_n ist die Besselsche Funktion, $H_n^{(1,2)}$ die Hankelsche Funktion erster bzw. zweiter Art. Die $C_{n0}^m(i\gamma)$ sind in (72) definiert. Die Koeffizienten $a_{n,r}^m(i\gamma)$ (r = gerade) sind Lösungen eines gewissen dreigliedrigen Rekursionssystems. Für das Folgende genügt es jedoch, wenn man ihre numerischen Werte kennt. Dann sind auch die Sphäroid-Funktionen numerisch berechenbar. Zweckmäßigerweise normieren wir diese Koeffizienten so, daß

$$\sum_{r \geqq -n+|m|} \frac{2n+1}{2n+2r+1}\, a_{n,r}^m(i\gamma)\, a_{n,r}^{-m}(i\gamma) = 1. \tag{30}$$

Das hat zur Folge, daß das Normierungsintegral für die Kugel-Funktionen P_n^m und für die Sphäroid-Funktionen Sp_n^m denselben Wert hat. Die Reihe (27) konvergiert für alle endlichen η, die Reihe (28) für alle endlichen ξ, falls $j = 1$, dagegen nur für $|\xi| > 1$, falls $j = 3, 4$; für $|\xi| < 1$ kann man die Funktionswerte aus anderen Reihendarstellungen der Sphäroid-Funktionen berechnen. Für große ξ gilt asymptotisch

$$S_n^{m(1)}(-i\xi; i\gamma) \sim \frac{1}{\gamma\xi} \cos\left(\gamma\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right), \tag{31}$$

$$S_n^{m(3)}(-i\xi; i\gamma) \sim \frac{1}{\gamma\xi} e^{+i\left(\gamma\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right)}, \qquad S_n^{m(4)}(-i\xi; i\gamma) \sim \frac{1}{\gamma\xi} e^{-i\left(\gamma\xi - \frac{n+1}{2}\pi\right)}. \tag{32}$$

Genau so wie sich die Sphäroid-Funktionen in (27) nach dem Orthogonalsystem der Kugel-Funktionen entwickeln lassen, gilt das Umgekehrte. Man erhält (s = gerade)

$$P_n^m(\eta) = \sum_{s \geqq |m|-n}^{\infty} i^s a_{n+s,-s}^{-m}(i\gamma) \frac{2n+2s+1}{2n+1} Sp_{n+s}^m(\eta; i\gamma). \tag{33}$$

Für die in Polarkoordinaten r, ϑ, φ separierten Wellenfunktionen läßt sich ebenso eine Entwicklung

[6] W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943.

[7] C. Niven, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **171**, 117 [1880].

nach Wellenfunktionen, die in ξ, η, φ separiert sind, gewinnen

$$\psi_n^{(j)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi} = \sum_{s \geq |m| - n}^{\infty} a_{n+s,\,-s}^{-m}(i\gamma)\, \frac{2n+2s+1}{2n+1}\, L_{n+s}^{m\,(j)}(\xi, \eta, \varphi; i\gamma)\,. \tag{34}$$

VII. Entwicklung der Debyeschen Potentiale der ebenen Welle nach Laméschen Wellenfunktionen

Die Fortschreitungsrichtung der einfallenden ebenen Welle läßt sich ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit als parallel zur x,z-Ebene annehmen. Der Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$ gebe die Richtung an, aus welcher die ebene Welle kommt; sie schließe mit der positiven z-Achse den Winkel Θ ein. Dann gilt

$$\mathfrak{k} = k\{\sin\Theta, 0, \cos\Theta\}, \qquad \frac{\mathfrak{r}}{r} = \{\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\}\,. \tag{35}$$

Nun sind zwei Polarisationsrichtungen zu unterscheiden. Wir bezeichnen die Feldgrößen mit dem Index $\perp$, wenn die Schwingungsebene der einfallenden Welle senkrecht zur Einfallsebene (hier x,z-Ebene), mit dem Index $\parallel$, wenn die Schwingungsebene parallel zur Einfallsebene ist. Nehmen wir die Amplitude des elektrischen Vektors der einfallenden ebenen Welle zu E an, so wird

$$\mathfrak{E}_\perp = \{0, E, 0\}\, e^{ikR + i\omega t}, \qquad \mathfrak{H}_\perp = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \{E\cos\Theta, 0, -E\sin\Theta\}\, e^{ikR+i\omega t}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{E}_\parallel = \{-E\cos\Theta, 0, E\sin\Theta\}\, e^{ikR+i\omega t}, \qquad \mathfrak{H}_\parallel = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \{0, E, 0\}\, e^{ikR+i\omega t}, \tag{37}$$

wo

$$R = r(\cos\vartheta\cos\Theta + \sin\vartheta\sin\Theta\cos\varphi)\,. \tag{38}$$

Einsetzen von (36) in (8) liefert für die Debyeschen Potentiale der einfallenden ebenen Welle im Falle zur Einfallsebene senkrechter Schwingungsrichtung die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 (r\,\Pi_{1\perp}^e)}{\partial r^2} + k^2 r\,\Pi_{1\perp}^e = E\,\varepsilon\sin\vartheta\sin\varphi\cdot e^{ikR+i\omega t}, \tag{39a}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(r\,\Pi_{1\perp}^e)}{\partial r\,\partial\vartheta} - ik\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial\Pi_{2\perp}^e}{\partial\varphi} = E\,\varepsilon\cos\vartheta\sin\varphi\cdot e^{ikR+i\omega t}, \tag{39b}$$

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2(r\,\Pi_{1\perp}^e)}{\partial r\,\partial\varphi} + ik\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{\partial\Pi_{2\perp}^e}{\partial\vartheta} = E\,\varepsilon\cos\varphi\cdot e^{ikR+i\omega t}. \tag{39c}$$

Der Ansatz einer Reihe nach separierten Wellenfunktionen in Kugelkoordinaten für die beiden Potentiale liefert dann nach einigen Rechnungen

$$\Pi_{1\perp}^e = -\frac{\varepsilon E}{k\sin\Theta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} i^n\,\frac{(2n+1)\,m}{n(n+1)}\,(-1)^m P_n^{-m}(\cos\Theta)\,\psi_n^m(r,\vartheta,\varphi)\,e^{i\omega t}, \tag{40}$$

$$\Pi_{2\perp}^e = +\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ik}\,E\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} i^n\,\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\,(-1)^m\,\frac{dP_n^{-m}(\cos\Theta)}{d\Theta}\,\psi_n^m(r,\vartheta,\varphi)\,e^{i\omega t}, \tag{41}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\psi_n^m(r,\vartheta,\varphi) = \psi_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}\,. \tag{42}$$

Entsprechende Differentialgleichungen zu (39a, b, c) für $\Pi_{1\parallel}^e$ und $\Pi_{2\parallel}^e$ gewinnt man durch Einsetzen von (37) in (8). Aus ihnen erhält man

$$\Pi^{\mathrm{e}}_{1\parallel} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\Pi^{\mathrm{e}}_{2\perp}\,, \qquad \Pi^{\mathrm{e}}_{2\parallel} = +\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\Pi^{\mathrm{e}}_{1\perp}\,. \tag{43}$$

Die Differentialgleichungen (10) sind mit diesen Reihen für die Debyeschen Potentiale von selbst erfüllt, da jedes einzelne Reihenglied diesen Gleichungen genügt.

Um eine Entwicklung der Debyeschen Potentiale der ebenen Welle nach Laméschen Wellenfunktionen zu erhalten, sind die in Kugelkoordinaten separierten Wellenfunktionen gemäß (34) in Reihen nach Wellenfunktionen, die in den Koordinaten ξ, η, φ separiert sind, zu entwickeln. Einsetzen in (40) und (41) liefert daher

$$\Pi^{\mathrm{e}}_{1\perp} = -E\frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,m\,i^n\,(-1)^m\,L_n^{m\,(1)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,U_{-n}^{m}(\Theta)\,e^{i\omega t}\,, \tag{44}$$

$$\Pi^{\mathrm{e}}_{2\perp} = +E\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{i\,k}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,i^n\,(-1)^m\,L_n^{m\,(1)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,V_n^{m}(\Theta)\,e^{i\omega t}\,. \tag{45}$$

Zur Abkürzung wurde eingeführt

$$U_n^m(\Theta) = \sum_{r\geq|m|-n}^{\infty}\frac{i^r\,a_{n,r}^{-m}(i\gamma)}{(n+r)(n+r+1)}\,P_{n+r}^{-m}(\cos\Theta)/\sin\Theta\,, \tag{46}$$

$$V_n^m(\Theta) = \sum_{r\geq|m|-n}^{\infty}\frac{i^r\,a_{n,r}^{-m}(i\gamma)}{(n+r)(n+r+1)}\,dP_{n+r}^{-m}(\cos\Theta)/d\Theta\,. \tag{47}$$

Speziell für $\Theta = 0$, d. h. für eine ebene Welle, welche parallel zur z-Achse von positiven nach negativen z läuft, vereinfachen sich diese Ausdrücke beträchtlich. Dann wird

$$\Pi^{\mathrm{e}}_{1\perp} = E\frac{i\,\varepsilon}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\,i^n}{n\,(n+1)}\,C_{n\,0}^{1}(i\gamma)\,S_n^{1\,(1)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^1(\eta;i\gamma)\,\sin\varphi\cdot e^{i\omega t}\,, \tag{48}$$

$$\Pi^{\mathrm{e}}_{2\perp} = E\,i\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\,i^n}{n\,(n+1)}\,C_{n\,0}^{1}(i\gamma)\,S_n^{1\,(1)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^1(\eta;i\gamma)\,\cos\varphi\cdot e^{i\omega t}\,. \tag{49}$$

Die angegebenen Reihenentwicklungen sind im ganzen Raume konvergent.

VIII. Berechnung des ersten Teils der gebeugten Welle

Wir zerlegen die Debyeschen Potentiale der gebeugten Welle in zwei Teile.

$$\Pi_1^{\mathrm{b}} = \overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_1^{\mathrm{b}}\,, \qquad \Pi_2^{\mathrm{b}} = \overline{\Pi}_2^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_2^{\mathrm{b}}\,. \tag{50}$$

Den ersten Teil bestimmen wir aus der Forderung

$$\Pi_1^{\mathrm{e}} + \overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}} = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi_2^{\mathrm{e}} + \Pi_2^{\mathrm{b}}\right) = 0 \qquad \text{für } \xi = 0\,. \tag{51}$$

Dann muß für den zweiten Teil nach (17) für $\xi = 0$ gelten:

$$\varrho\,\overline{\overline{\Pi}}_1^{\mathrm{b}} = \alpha(\varphi)\,e^{ik\varrho} + \beta(\varphi)\,e^{-ik\varrho}\,; \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\varrho^2\,\frac{\partial\overline{\overline{\Pi}}_2^{\mathrm{b}}}{\partial z} = \frac{d\alpha}{d\varphi}\,e^{ik\varrho} - \frac{d\beta}{d\varphi}\,e^{-ik\varrho}\,. \tag{52}$$

Sowohl $\overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}}$, $\overline{\Pi}_2^{\mathrm{b}}$ wie $\overline{\overline{\Pi}}_1^{\mathrm{b}}$, $\overline{\overline{\Pi}}_2^{\mathrm{b}}$ stellen auslaufende Wellen dar und lassen sich daher additiv aus Laméschen Wellenfunktionen auslaufender Wellen $L_n^{m\,(4)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)$ aufbauen. Man prüft leicht nach, daß die folgenden Ausdrücke für $\overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}}$, $\overline{\Pi}_2^{\mathrm{b}}$ die Forderungen (51) erfüllen.

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{1\perp} = +E\frac{\varepsilon}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,i^n\,m\,(-1)^m\,L_n^{m\,(4)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,U_n^m(\Theta)\,\frac{S_n^{m\,(1)}(-i\,0;i\gamma)}{S_n^{m\,(4)}(-i\,0;i\gamma)}\,e^{i\omega t}, \tag{53}$$

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{2\perp} = -E\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ik}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,i^n\,(-1)^m\,L_n^{m\,(4)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,V_n^m(\Theta)\,\frac{dS_n^{m\,(1)}(-i\,0;i\gamma)/d\xi}{dS_n^{m\,(4)}(-i\,0;i\gamma)/d\xi}\,e^{i\omega t}, \tag{54}$$

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{1\parallel} = +E\frac{\varepsilon}{ik}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,i^n\,(-1)^m\,L_n^{m\,(4)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,V_n^m(\Theta)\,\frac{S_n^{m\,(1)}(-i\,0;i\gamma)}{S_n^{m\,(4)}(-i\,0;i\gamma)}\,e^{i\omega t}, \tag{55}$$

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{2\parallel} = +E\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ik}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(2n+1)\,i^n\,m\,(-1)^m\,L_n^{m\,(4)}(\xi,\eta,\varphi;i\gamma)\,U_n^m(\Theta)\,\frac{dS_n^{m\,(1)}(-i\,0;i\gamma)/d\xi}{dS_n^{m\,(4)}(-i\,0;i\gamma)/d\xi}\,e^{i\omega t}. \tag{56}$$

Es ist zu bemerken, daß die Glieder mit ungeraden Differenzen $n-m$ in (53) und (55), jene mit geraden $n-m$ in (54) und (56) wegen des Verhaltens der Sphäroid-Funktionen erster Art und ihrer Ableitung für das Argument Null verschwinden. Diese vier angeschriebenen Funktionen genügen alle der Wellengleichung, verhalten sich in großer Entfernung wie auslaufende Kugelwellen und sind überall endlich.

Für $\Theta = 0$ treten wieder beträchtliche Vereinfachungen ein; es wird

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{1\perp} = -E\frac{i\varepsilon}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\,i^n\,C^1_{n\,0}(i\gamma)\,S_n^{1\,(4)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^{1\,(1)}(\eta;i\gamma)\sin\varphi\,\frac{S_n^{1\,(1)}(-i0;i\gamma)}{S_n^{1\,(4)}(-i0;i\gamma)}\,e^{i\omega t}, \tag{57}$$

$$\overline{\Pi}^{\mathrm{b}}_{2\perp} = -E\,i\,\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\,i^n\,C^1_{n\,0}(i\gamma)\,S_n^{1\,(4)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^{1\,(1)}(\eta;i\gamma)\cos\varphi\,\frac{dS_n^{1\,(1)}(-i0;i\gamma)/d\xi}{dS_n^{1\,(4)}(-i0;i\gamma)/d\xi}\,e^{i\omega t}. \tag{58}$$

Auch diese Reihen konvergieren im ganzen Raum. Im Falle $\Theta = 0$ ist eine gesonderte Berechnung von $\overline{\Pi}_1{}^{\mathrm{b}}{}_{\parallel}$ und $\overline{\Pi}_2{}^{\mathrm{b}}{}_{\parallel}$ nicht nötig, da der Fall paralleler und senkrechter Schwingungsebene sich in den Feldstärken nur in einer Drehung um 90° um die z-Achse unterscheidet.

IX. Berechnung des zweiten Teils der gebeugten Welle

Wir denken uns die zunächst noch unbekannten Funktionen $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$ in (52) in Fourier-Reihen entwickelt

$$\alpha(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m\,e^{im\varphi}, \qquad \beta(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m\,e^{im\varphi}. \tag{59}$$

Für $\overline{\overline{\Pi}}_1{}^{\mathrm{b}}$ und $\overline{\overline{\Pi}}_2{}^{\mathrm{b}}$ sind Wellenfunktionen anzusetzen, die sich in großer Entfernung wie auslaufende Kugelwellen verhalten und die Randbedingungen (52) für $\xi = 0$ erfüllen. Wir setzen

$$\overline{\overline{\Pi}}{}^{\mathrm{b}}_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^m\,S_n^{m\,(4)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^m(\eta;i\gamma)\,e^{im\varphi}, \tag{60}$$

$$\overline{\overline{\Pi}}{}^{\mathrm{b}}_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}B_n^m\,S_n^{m\,(4)}(-i\xi;i\gamma)\,Sp_n^m(\eta;i\gamma)\,e^{im\varphi}. \tag{61}$$

Die Randbedingungen (52) liefern nun unter Berücksichtigung von (59)

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^m\,S_n^{m\,(4)}(-i\,0;i\gamma)\,Sp_n^m(\eta;i\gamma) = \alpha_m\,\frac{e^{i\gamma\sqrt{1-\eta^2}}}{c\sqrt{1-\eta^2}} + \beta_m\,\frac{e^{-i\gamma\sqrt{1-\eta^2}}}{c\sqrt{1-\eta^2}}, \tag{62}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^m \left[dS_n^{m\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi\right]_{\xi=0} Sp_n^m(\eta\,;\,i\,\gamma) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{i\,m\,\eta}{c\,(1-\eta^2)}\left[\alpha_m\,e^{i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}} - \beta_m\,e^{-i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}}\right]. \tag{63}$$

Man sieht sofort, daß

$$A_n^m = 0 \text{ für } n - m = \text{ungerade}\,, \quad B_n^m = 0 \text{ für } n - m = \text{gerade}\,. \tag{64}$$

Die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$\int_{-1}^{1} Sp_n^m(\eta\,;\,i\,\gamma)\,Sp_l^{-m}(\eta\,;\,i\,\gamma)\,d\eta = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq l\,, \\ \dfrac{2}{2\,n+1} \text{ für } n = l \end{cases} \tag{65}$$

erlauben, die Koeffizienten A_n^m und B_n^m durch die α_m und β_m auszudrücken.

Die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Pi_1^{\mathrm{e}} + \overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_1^{\mathrm{b}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Pi_2^{\mathrm{e}} + \overline{\Pi}_2^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_2^{\mathrm{b}}\right) = 0 \quad \text{für } \xi = \eta = 0 \tag{66}$$

aus (21) sind erfüllt; denn nach (15) und (16) sind für $\xi = 0$, d. h. auf der Kreisscheibe, Π_1 und $\partial\Pi_2/\partial z = \frac{1}{c\,\eta}\,\partial\Pi_2/\partial\xi$ gerade Funktionen in η; (66) gilt daher sogar für alle η, wenn $\xi = 0$. Die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Pi_1^{\mathrm{e}} + \overline{\Pi}_1^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_1^{\mathrm{b}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Pi_2^{\mathrm{e}} + \overline{\Pi}_2^{\mathrm{b}} + \overline{\overline{\Pi}}_2^{\mathrm{b}}\right) = 0 \quad \text{für } \xi = \eta = 0 \tag{67}$$

aus (21) geben gerade zwei Gleichungen für jedes Paar von Koeffizienten α_m, β_m. Damit ist die Lösung des Beugungsproblems vollständig bestimmt.

Die Anteile der einfallenden Welle darf man dabei in (67) weglassen, weil für diese an der Schirmkante die Ableitungen nach ξ und η verschwinden. Physikalisch folgt dies daraus, daß die einfallende Welle überall endlich ist, also an der Schirmkante keine unendlichen Feldstärken besitzt.

X. Berechnung der Entwicklungskoeffizienten A_n^m und B_n^m

Die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen (65) geben

$$A_n^m\,S_n^{m\,(4)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)\,\frac{2}{2\,n+1} = \frac{1}{c}\int_{-1}^{1}\left[\alpha_m\,\frac{e^{i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}}}{\sqrt{1-\eta^2}} + \beta_m\,\frac{e^{i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}}}{\sqrt{1-\eta^2}}\right] Sp_n^{-m}(\eta\,;\,i\,\gamma)\,d\eta\,, \tag{68}$$

$$\begin{aligned} &B_n^m\left[dS_n^{m\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi\right]_{\xi=0}\frac{2}{2\,n+1} \\ &\quad = \frac{i\,m}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}\frac{\eta}{1-\eta^2}\left[\alpha_m\,e^{i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}} - \beta_m\,e^{-i\,\gamma\sqrt{1-\eta^2}}\right] Sp_n^{-m}(\eta\,;\,i\,\gamma)\,d\eta\,. \end{aligned} \tag{69}$$

Diese Integrale lassen sich geschlossen auswerten. Wir verzichten jedoch hier auf ihre Berechnung, die an anderer Stelle in anderem Zusammenhang erfolgen soll, und begnügen uns mit der Angabe ihres Wertes für $m = +1$. Nur diesen brauchen wir, wenn wir uns, wie dies im folgenden geschehen soll, auf den Fall $\Theta = 0$, d. h. senkrechte Inzidenz der ebenen Welle auf die Kreisscheibe, beschränken. Dann wird

$$\begin{aligned} A_n^1\,S_n^{1\,(4)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)\,\frac{n\,(n+1)}{2\,n+1}\,c = {} & \left[+C_{n\,0}^1(i\,\gamma) - \gamma\,a_{n,\,-n-1}^1(i\,\gamma)\,S_n^{1\,(3)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)\right]\alpha_1 \\ & + \left[+C_{n\,0}^1(i\,\gamma) - \gamma\,a_{n,\,-n-1}^1(i\,\gamma)\,S_n^{1\,(4)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)\right]\beta_1\,; \\ & (n = \text{ungerade}) \end{aligned} \tag{70}$$

$$B_n^1\left[dS_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi\right]_{\xi=0}\frac{n\,(n+1)}{2\,n+1}\,c\,\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}=\gamma\left[-C_{n\,0}^1(i\,\gamma)+a_{n,-n}^1(i\,\gamma)\left[dS_n^{1\,(3)}(-i\,\xi;\,i\,\gamma)/d\xi\right]_{\xi=0}\right]\alpha_1$$
$$+\gamma\left[-C_{n\,0}^1(i\,\gamma)+a_{n,-n}^1(i\,\gamma)\left[dS_n^{1\,(3)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi\right]_{\xi=0}\right]\beta_1\,. \tag{71}$$
$$(n=\text{gerade})$$

Zur Abkürzung ist gesetzt

$$C_{n\,0}^1(i\,\gamma)=\sum_{r\geqq -n-1}^{\infty} i^r\,a_{n,r}^1(i\,\gamma)\,. \tag{72}$$

Da Π_1^e, $\overline{\Pi}_1^b$ proportional zu $\sin\varphi$, Π_2^e, $\overline{\Pi}_2^b$ proportional zu $\cos\varphi$, so müssen auf Grund von (67) dieselben Proportionalitäten für $\overline{\overline{\Pi}}_1^b$ und $\overline{\overline{\Pi}}_2^b$ bestehen. Somit genügt es, A_n^1, B_n^1 zu berechnen und die entsprechenden Reihenglieder in (60) und (61) mit $e^{i\varphi}\mp e^{-i\varphi}$ statt mit $e^{i\varphi}$ zu multiplizieren.

Als Gesamtergebnis erhalten wir nunmehr

$$\Pi_1=E\frac{i\,\varepsilon}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n+1}{n\,(n+1)}\,i^n\,C_{n\,0}^1(i\,\gamma)\left[S_n^{1\,(1)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)-S_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)\frac{S_n^{1\,(1)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)}{S_n^{1\,(4)}(-i\,0\,;\,i\,\gamma)}\right]Sp_n^1(\eta\,;\,i\,\gamma)$$
$$\cdot\sin\varphi\,e^{i\,\omega\,t}+2\,i\,\sin\varphi\sum_{n=1}^{\infty}A_n^1\,S_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)\,Sp_n^1(\eta\,;\,i\,\gamma)\,e^{i\,\omega\,t}\,; \tag{73}$$

$$\Pi_2=E\frac{i\sqrt{\varepsilon\,\mu}}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\,n+1}{n\,(n+1)}\,i^n\,C_{n\,0}^1(i\,\gamma)\left[S_n^{1\,(1)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)-S_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)\left[\frac{dS_n^{1\,(1)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi}{dS_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)/d\xi}\right]_{\xi=0}\right]$$
$$\cdot\,Sp_n^1(\eta\,;\,i\,\gamma)\cos\varphi\,e^{i\,\omega\,t}+2\cos\varphi\sum_{n=2}^{\infty}B_n^1\,S_n^{1\,(4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)\,Sp_n^1(\eta\,;\,i\,\gamma)\,e^{i\,\omega\,t}\,. \tag{74}$$

Die bis jetzt unbekannten Größen α_1 und β_1 ergeben sich daraus, daß $\partial\Pi_1/\partial\xi=0$ und $\partial\Pi_2/\partial\eta=0$ für $\xi=\eta=0$. Dies liefert für α_1 und β_1 zwei lineare Gleichungen.

XI. Grenzfall großer Wellenlängen

Ist die Wellenlänge groß gegen den Radius der Kreisscheibe, d. h. $\gamma\ll 1$, so gehen die Sphäroid-Funktionen in Kugel-Funktionen erster bzw. zweiter Art über, falls neben η auch ξ endlich bleibt. Aus den Größenordnungen $S_n^{1\,(1)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)=0\,(\gamma^r)$, $S_n^{1\,(3,4)}(-i\,\xi\,;\,i\,\gamma)=0\,(\gamma^{-n-1})$ folgt, daß in (73) und (74) von der jeweils ersten unendlichen Reihe nur das erste Glied übrig bleibt. Von der jeweils zweiten Reihe sind jedoch alle Glieder zu berücksichtigen. Die Differentialquotienten dieser zweiten Reihen nach ξ bzw. η, welche man zur Verwertung der Kantenbedingungen (21) benötigt, lassen sich jedoch nicht gliedweise bilden, da dann divergente Reihen (alternierende Reihen mit dem allgemeinen Glied der Ordnung $n^{1/2}$) entstehen würden. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch umgehen, indem man zwar gliedweise differenziert, aber dann nach einem Summierungsverfahren (etwa dem der arithmetischen Mittel) die Summe berechnet. Dies ist für große Wellenlängen geschlossen durchführbar und liefert

$$\alpha_1+\beta_1=E\frac{\varepsilon\,i\,\gamma^2}{2\,k^2}\left(1+0\,(\gamma)\right),$$
$$\alpha_1-\beta_1=-E\frac{\varepsilon\,\gamma^3}{9\,\pi\,k^2}\left(1+0\,(\gamma)\right). \tag{75}$$

Mit diesen Werten von α_1 und β_1 kann nun das gesamte Feld berechnet werden. In der Wellenzone mit $\gamma\,\xi\gg 1$ bleibt, wie die asymptotischen Darstellungen (31) und (32) neben den obigen Abschätzungen lehren, von allen Reihen in (73) und (74) nur jeweils das erste Glied übrig, und es ergibt sich wegen $\gamma\,\xi\approx k\,r$ für Π_1^b

$$\Pi_1^b\approx E\frac{4\,\gamma^3\,\varepsilon}{3\,\pi\,i\,k^2}\,\frac{e^{-i\,k\,r}}{r}\,P_1^1(\cos\vartheta)\sin\varphi\,e^{i\,\omega\,t}. \tag{76}$$

Die (76) entsprechende Ausstrahlung ist die eines elektrischen Dipols mit dem Moment

$$p_y = E\,\frac{16}{3}\,a^3\,\varepsilon\,e^{i\omega t}\,. \qquad (77)$$

Dies ist aber gerade das Dipolmoment der Ladungsverteilung, die in der Kreisscheibe induziert wird, wenn sie sich im homogenen elektrischen Feld $E\,e^{i\omega t}$ (für $\gamma \ll 1$, d. h. quasistatisch gerechnet) parallel zur y-Achse befindet.

Auf die Berechnung und Deutung von Π_2^b verzichten wir, da bereits das erste Glied von einer Größenordnung ist, wie wir sie eben in Π_1^b vernachlässigt haben.

XII. Bemerkungen zur numerischen Auswertung

Die numerische Auswertung der Formeln (73) und (74) setzt die Existenz von Tafeln der Sphäroid-Funktionen voraus. Solche wurden von Stratton und Mitarbb.[8] berechnet, doch haben sie noch nicht den wünschenswerten Umfang. Dasselbe gilt für die vom Verf.[9] berechneten Entwicklungen der $a^m_{n,r}(i\gamma)$ (auf diese kommt es praktisch nur an) nach Potenzen von γ, die für kleine n nur etwa bis $\gamma = 1$ brauchbar sind. Wichtig wäre der Bereich $0 \leqq \gamma \leqq 10$ und $1 \leqq n \leqq 12$ etwa. Für solche Werte von γ ist die Zahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder (nämlich schätzungsweise bis $n = 12$) noch erträglich, überdies wird man etwa bei $\gamma = 10$ bereits einen guten Anschluß an die Ergebnisse der Kirchhoffschen Näherung erzielen, wie das auch beim skalaren Beugungsproblem nach noch unveröffentlichten Untersuchungen der Fall ist. Die numerische Berechnung der benötigten Sphäroid-Funktionen macht beim heutigen Stand ihrer Theorie keine prinzipiellen und keine sehr großen praktischen Schwierigkeiten.

Ein etwas schwieriger Punkt ist die schon erwähnte Divergenz der Reihen, die sich ergibt, wenn man (73) und (74) nach ξ bzw. η differenziert und $\xi = \eta = 0$ setzt. Denn auch die Anwendung eines Summierungsverfahrens würde die Berücksichtigung vieler Reihenglieder erfordern. Einen Ausweg gibt aber die Tatsache, daß die Reihenglieder für größere n sehr rasch gegen die entsprechenden Reihenglieder des Falles $\gamma = 0$ konvergieren, für den die Summen der divergenten Reihen sich geschlossen berechnen lassen. Man wird daher von der aufzusummierenden Reihe für $\gamma \neq 0$ die entsprechende Reihe für $\gamma = 0$ gliedweise subtrahieren. Dann entsteht eine konvergente Reihe, deren Aufsummierung wesentlich einfacher sein wird.

Die noch durchzuführende numerische Auswertung des Feldes der gebeugten Welle, die wir in einer späteren Arbeit wiedergeben wollen, wird sich vor allem auf das Feld in großer Entfernung und in der Nähe der Kreisscheibe bzw. der kreisförmigen Öffnung erstrecken, mit dem Ziele, Aufschluß über die Polarisationsverhältnisse, die Abstrahlung bei großen Winkeln und die Güte und Brauchbarkeit der Kirchhoffschen Näherung zu erhalten. Die Ergebnisse gewinnen an Interesse durch neuere experimentelle Untersuchungen des Feldes in der Nähe der kreisförmigen Öffnung bei Wellenlängen in der Größenordnung des Durchmessers der Öffnung, die von Severin[10] und Andrews[11] mit Wellenlängen von 6 bis 12,8 cm durchgeführt wurden.

[8] J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu u. R. A. Hutner, Elliptic cylinder and spheroidal wave functions, including tables of separation constants and coefficients. New York 1941.

[9] J. Meixner, Die Laméschen Wellenfunktionen des Drehellipsoids. Ber. Zentrale wiss. Berichterstattung Nr. 1952 [1944].

[10] H. Severin, Z. Naturforschg. **1**, 487 [1946].

[11] C. L. Andrews, Physic. Rev. **71**, 777 [1947].